

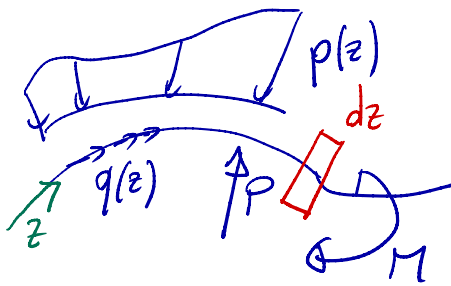
LINGA ELASTICA

La linea elastica

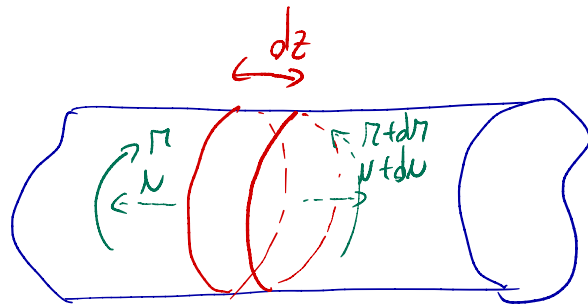
Il problema di Saint Venant presuppone che il solido sia caricato da forze esterne solo sulle basi.

È stato ricavato che lo stato di sforzo (e di deformazione) in ogni sezione dipende unicamente dalle azioni interne, ammettendo il postulato di DSV.

È possibile "estendere" i risultati di Saint Venant a qualunque trave, comunque caricata, a patto di considerare il generico tronco infinitesimo come se esso stesso fosse un solido di Saint Venant.



TRAVE QUALSIASI



SOLIDO DI SAINT VENANT

Si può così "estendere" il modello di Saint Venant a:

- travi vincolate, comunque caricate
- travi a sezione variabile
- travi ad asse curvilineo

Chiaramente, i risultati del modello sono tanto più attendibili quanto più il tronco elementare di trave tende a coincidere con il tronco elementare del solido di Saint Venant.

Con i casi di Saint Venant abbiamo introdotto anche il legame costitutivo "strutturale", che consente di relazionare le azioni interne a delle deformazioni di tipo strutturale.

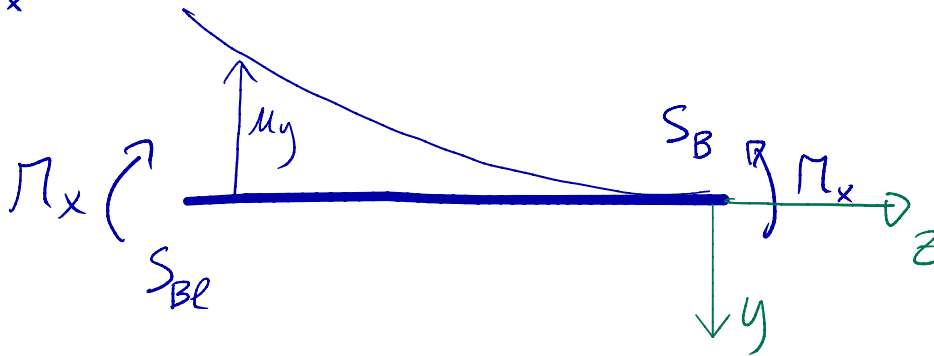
In particolare:

$$\epsilon_{zz} = \frac{du_z}{dz} = \frac{N}{EA}$$

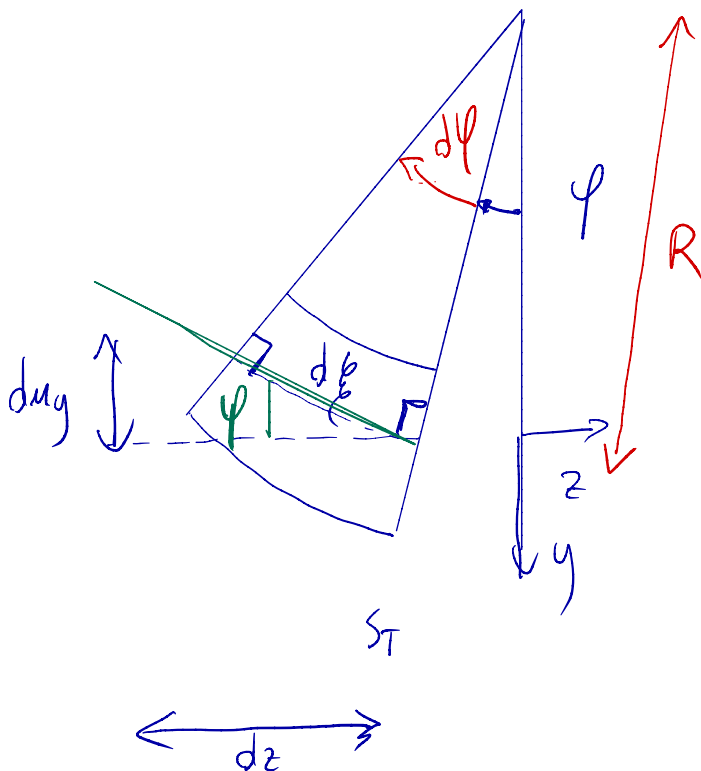
LEGAME "ASSIALE"

Per quanto riguarda la flessione retta abbiamo invece ricavato:

$$u_y = - \frac{M_x z^2}{2 E J_x} \quad (*) \quad \text{SPOSTAM. ASSE GEOMETRICO DELLA TRAVE}$$



TEOREMA DI BERNOULLI



- La sezione ruota restando piana, di un angolo pari a φ .

• Curvatura $\chi = \frac{1}{R}$

$$\chi = - \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\chi = - \frac{d^2 u_y}{dz^2} \quad (**)$$

$$\varphi = \frac{du_y}{dz} \quad (9.34)$$

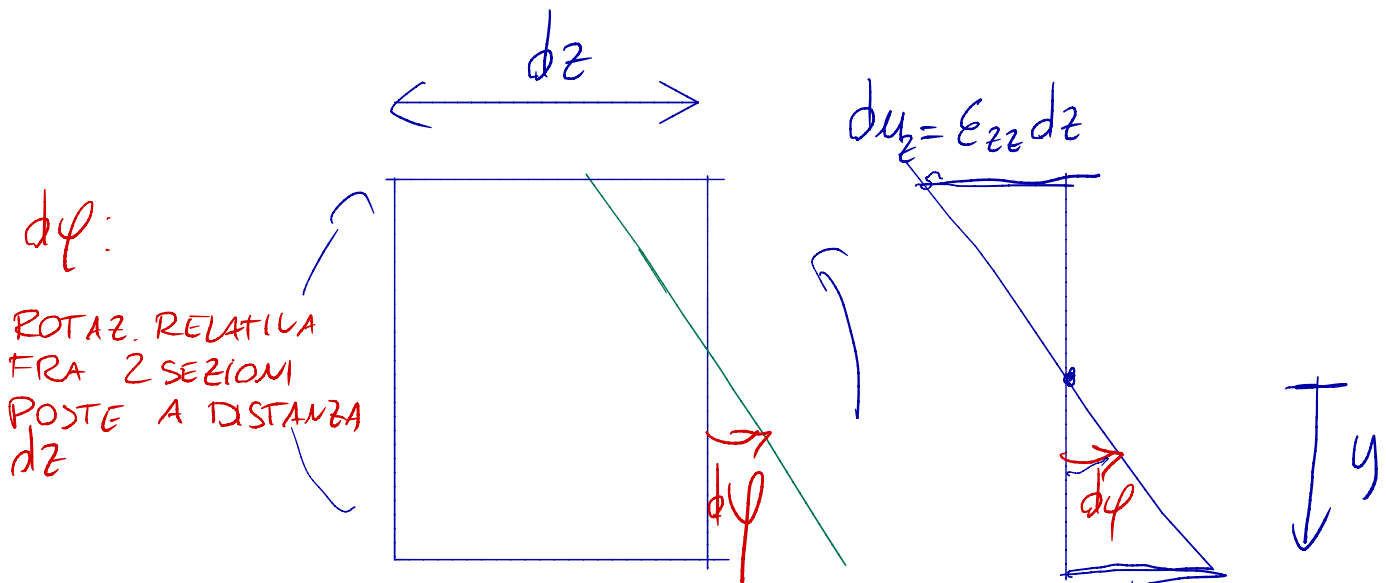
Derivando 2 volte (*) otteniamo

$$\frac{d^2 u_y}{dz^2} = - \frac{M_x}{EJ_x}$$

Sostituendo in (**)

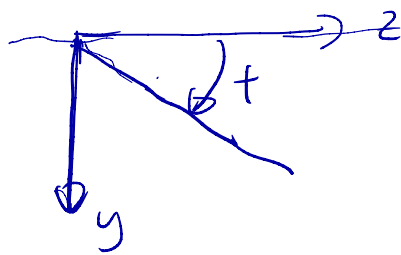
$$\chi = \frac{M}{EJ}$$

LEGGE "FLESSIONALE"



Nel sist. di riferimento, $d\varphi$ è negativo:

$$\varphi = \varphi(z)$$



z "VAR. INDIPENDENTE"

$$dy = dz \tan \varphi$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{M_x}{EJ_x} y \Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = - \frac{\epsilon_{zz}}{y} = - \frac{M_x}{EJ_x}$$

$$\chi = - \frac{d^2 u_y}{dz^2} = - \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Di fatto, stiamo utilizzando il legame costitutivo "strutturale" di Saint Venant, ottenuto per azione assiale e momento flettente costanti in ogni sezione nel caso di azioni interne variabili lungo l'asse della trave.

Per un modello "piano" di trave, poniamo:

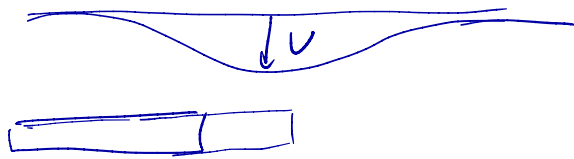
$u_1 \equiv v$, $u_2 \equiv u$, φ rotaz., z variabile indipendente, $J \equiv J_x$

$$u' = \frac{N}{EA}$$

$$v'' = - \frac{M}{EJ}$$

$$\varphi = v'$$

EQUAZIONI LINEA ELASTICA



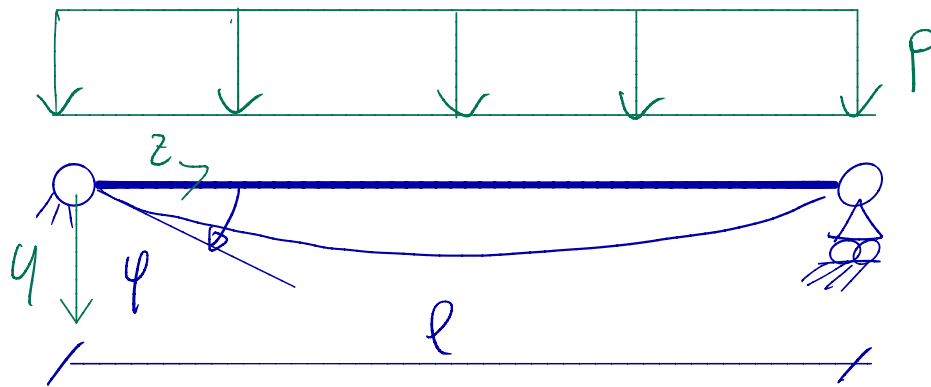
Le equazioni della linea elastica permettono:

- 1) di determinare gli spostamenti di sistemi piani di trave
- 2) di determinare le incognite iperstatiche

Si osserva che si è trascurato l'effetto della def. dovuta al taglio. Ciò deriva dall'aver assunto che le sezioni si mantengano piane e ortogonali all'asse.

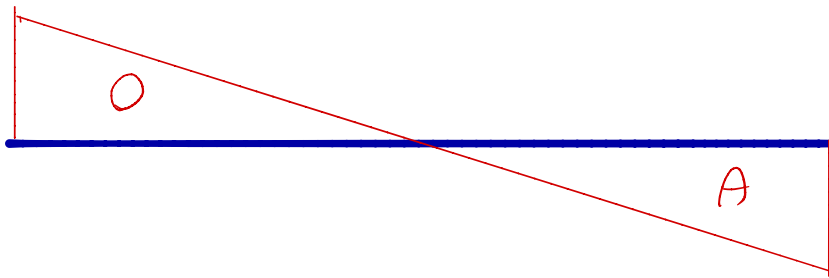
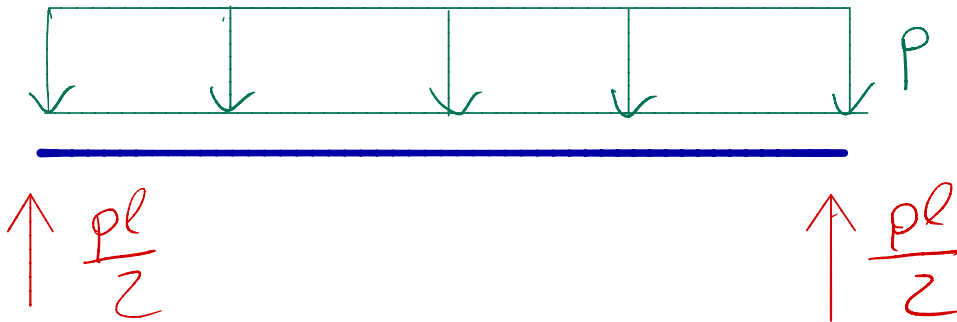
Nel caso di travi "snelle" è una buona approssimazione

ESEMPIO: ROTAZ. APPOGGIO E FRECCIA IN UNA TRAVE SEMPLICEMENTE
APPOGGIATA SOGGETTA A CARICO DISTRIBUITO UNIFORME

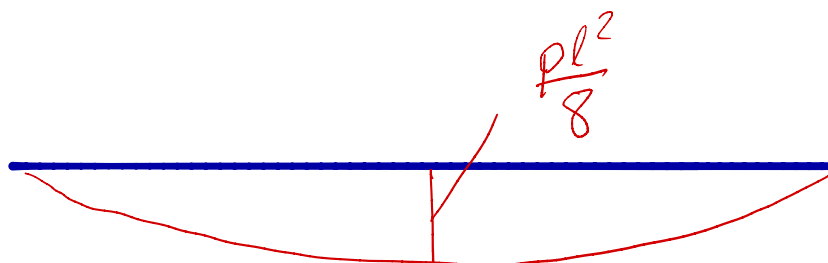


$\varphi = ?$

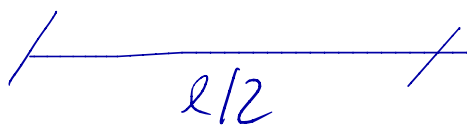
Reazioni vincolari e azioni interne



T



M



$$M(z) = \frac{pl}{2} z - \frac{pz^2}{2}$$

Equazione linea elastica

$$v'' = -\frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pz^2}{2} - \frac{pl}{2} z \right)$$

$$v' = \int v'' dz = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pz^3}{6} - \frac{pl}{4} z^2 \right) + c_1$$

$$v = \int v' dz = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pz^4}{24} - \frac{pl}{12} z^3 \right) + c_1 z + c_2$$

Condizioni al contorno

$$v(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$v(l) = 0 \quad \frac{1}{EJ} \left(\frac{pl^4}{24} - \frac{pl^3}{12} \right) + c_1 l = 0 \Rightarrow c_1 = + \frac{pl^3}{24EJ}$$

La rotazione dell'appoggio risulta pari a:

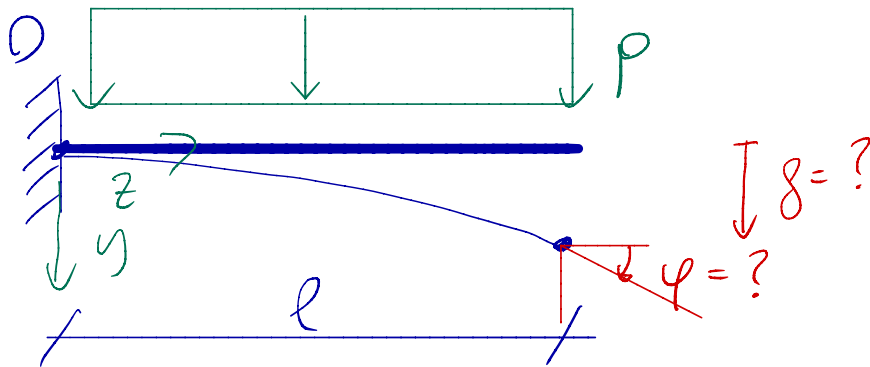
$$\psi = v'(0) = \frac{pl^3}{24EJ}$$

La freccia massima risulta pari a:

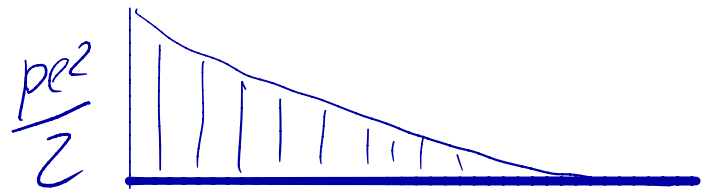
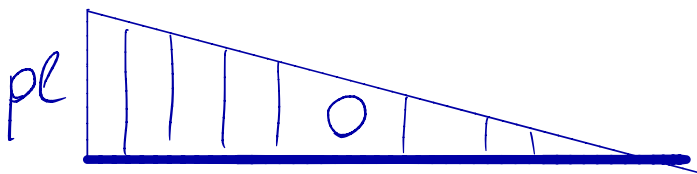
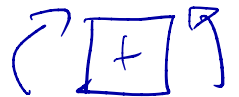
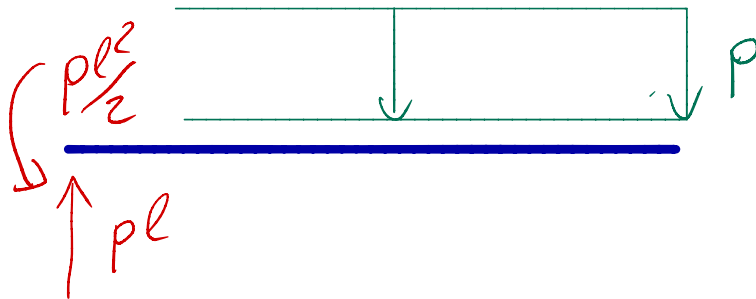
$$\begin{aligned} \delta = v\left(\frac{l}{2}\right) &= \frac{p}{EJ} \left(\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{16} l^4 - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{8} l^4 \right) + \frac{pl^3}{24EJ} \frac{l}{2} \\ &= \frac{pl^4}{EJ} \left(\frac{1}{384} - \frac{1}{96} + \frac{1}{48} \right) = \left(\frac{1 - 4 + 8}{384} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ}$$

ESEMPIO: rotaz. estrema e freccia di una mensola caricata uniformemente.



Reazioni vincolari e azioni interne



Posto un sist. di rif. Oxy in corrispondenza dell'incastro, osservando che sono positivi i momenti che tendono le fibre inferiori, risulta:

$$M(z) = plz - \frac{pz^2}{2} - \frac{pz^2}{2}$$

Applichiamo l'eq. della linea elastica:

$$v'' = -\frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pz^2}{2} - plz + \frac{pl^2}{2} \right)$$

Per ottenere il campo di spostamenti è necessario integrare tale eq. differenziale:

$$v' = \int v'' dz = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pz^3}{6} - \frac{plz^2}{2} + \frac{pl^2}{2} z \right) + C_1$$

$$v = \int v' dz = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pz^4}{24} - \frac{plz^3}{6} + \frac{pl^2}{4} z^2 \right) + C_1 z + C_2$$

Restano da determinare le condizioni al contorno C_1 e C_2 , che dipendono dai vincoli.

Poiché c'è un incastro, risulta:

$$v(0)=0, \quad \varphi(0)=0 \Rightarrow \begin{aligned} v(0) &= 0 \\ v'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Risulta quindi $C_1 = C_2 = 0$

Il campo di spostamenti risulta quindi pari a:

$$v(z) = \frac{1}{EJ} \left(\frac{pz^4}{24} - \frac{plz^3}{6} + \frac{pl^2 z^2}{4} \right)$$

Lo spostamento massimo (freccia) è per $z=l$.

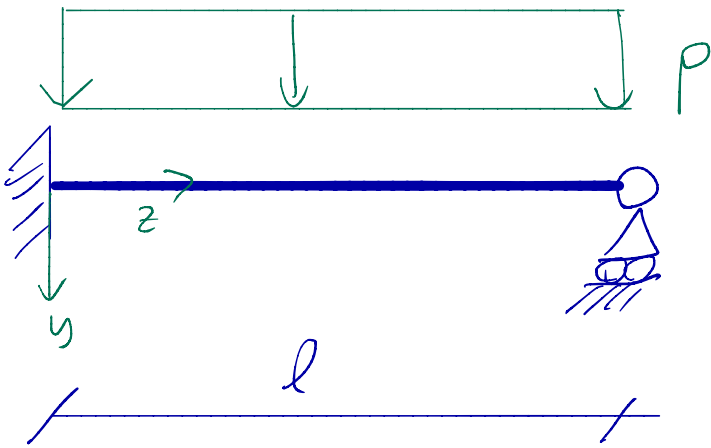
Risulta

$$\delta = v(l) = \frac{pl^4}{EJ} \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8} \frac{pl^4}{EJ}$$

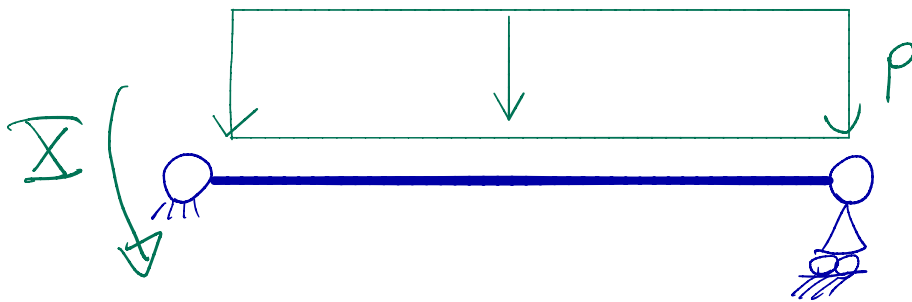
La rotazione dell'estremo libero risulta pari a:

$$\varphi = v'(l) = \frac{pl^3}{6EJ}$$

ESEMPIO: TRAVE INCASTRO-APPOGGIO (det. azioni interne)

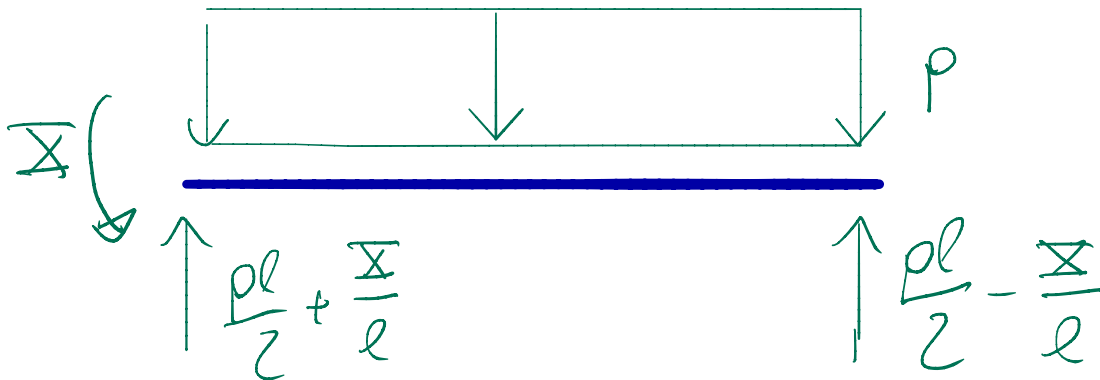


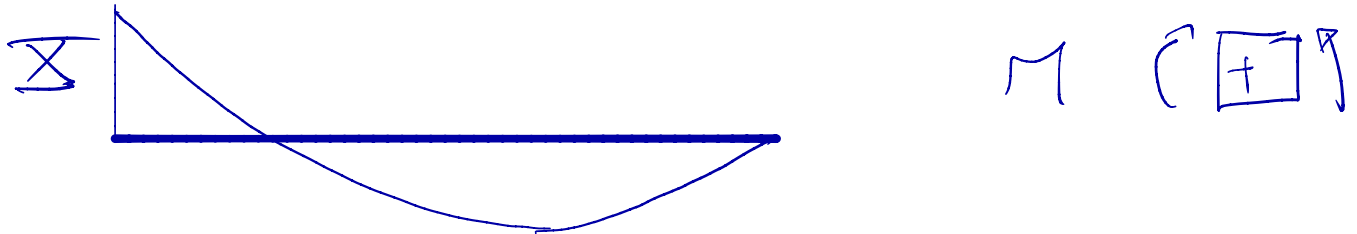
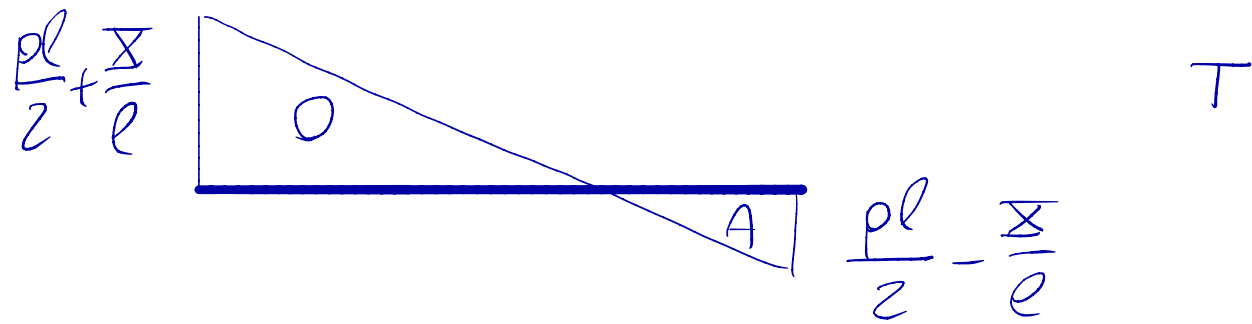
La struttura risulta 1 volta iperstatica. È necessario evidenziare una azione iperstatica



$$\sum \text{t.c. } \varphi(0) = 0$$

Reazioni vincolari e azioni interne





$$M(z) = -X + \left(\frac{pl}{2} + \frac{X}{l} \right) z - \frac{pz^2}{2}$$

Applichiamo l'eq. della linea elastica:

$$v'' = -\frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[X - \left(\frac{pl}{2} + \frac{X}{l} \right) z + \frac{pz^2}{2} \right]$$

Per ottenere il campo di spostamenti è necessario integrare tale eq. differenziale:

$$v' = \int v'' dz = \frac{1}{EJ} \left[Xz - \left(\frac{pl}{2} + \frac{X}{l} \right) \frac{z^2}{2} + \frac{pz^3}{6} \right] + C_1$$

$$v = \int v' dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{Xz^2}{2} - \left(\frac{pl}{2} + \frac{X}{l} \right) \frac{z^3}{6} + \frac{pz^4}{24} \right] + C_1 z + C_2$$

Restano da determinare le condizioni al contorno C_1 e C_2 , che dipendono dai vincoli, e l'incognita iperstatica X .

$$v(0)=0 \Rightarrow c_2=0$$

$$v'(0)=0 \Rightarrow c_1=0$$

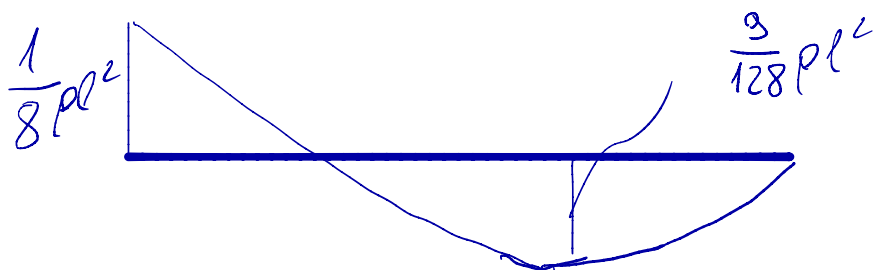
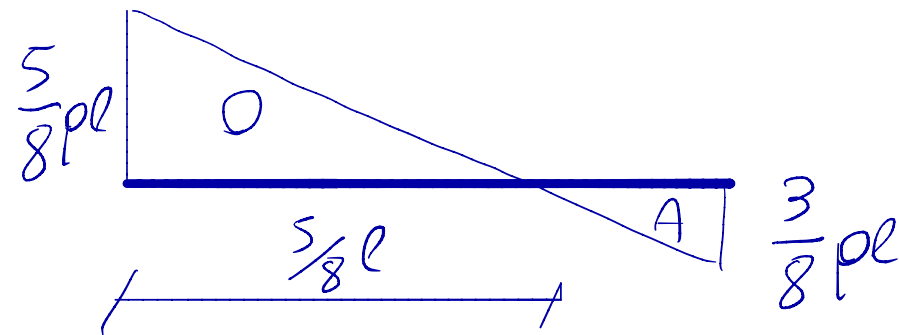
$$v(l)=0$$

$$\frac{1}{EJ} \left[\frac{\cancel{X} l^2}{\cancel{2}} - \left(\frac{pl}{2} + \frac{\cancel{X}}{l} \right) \frac{l^3}{\cancel{6}_3} + \frac{p l^4}{\cancel{24}_{12}} \right] = 0$$

$$X \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) p l^2$$

$$\frac{2}{3} X = \frac{1}{12} p l^2 \Rightarrow X = \frac{1}{8} p l^2$$

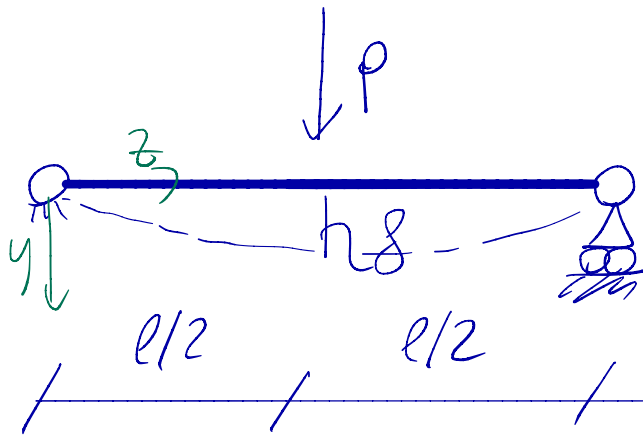
I diagrammi delle azioni interne risultano:



$$M\left(\frac{5}{8}l\right) = -\frac{1}{8}pl^2 + \left(\frac{pl}{2} + \frac{1}{8}pl\right) \cdot \frac{5}{8}l - p \frac{25}{128}l^2$$

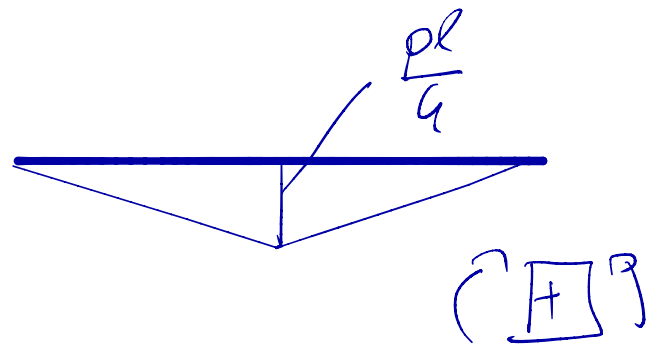
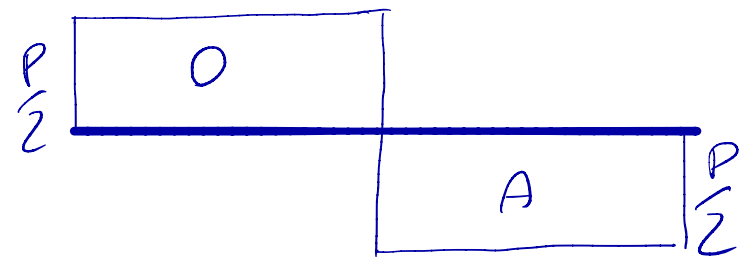
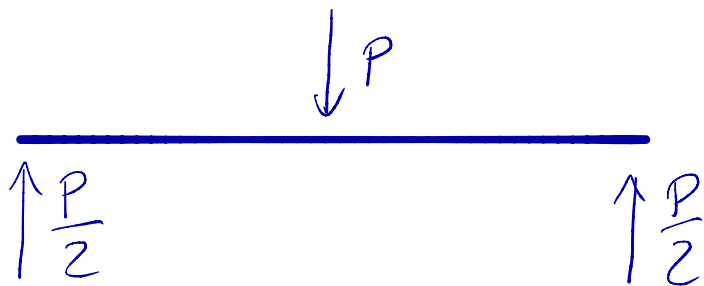
$$= pl^2 \left(-\frac{1}{8} + \frac{25}{128} \right) = -\frac{9}{128}pl^2$$

ESERPIO: TRAVE APPOGGIATA CON CARICO CONCENTRATO IN MEZZERA (grecia)



$$\delta = ?$$

Reazioni vincolari e azioni interne



$$M(z) = \begin{cases} \frac{P}{2} z & z \leq \frac{l}{2} \\ \frac{Pl}{4} - \frac{P}{2} z & z > \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$v'' = -\frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ} \begin{cases} -\frac{P}{2} z & z \leq \frac{l}{2} \\ -\frac{Pl}{4} + \frac{P}{2} z & z > \frac{l}{2} \end{cases}$$

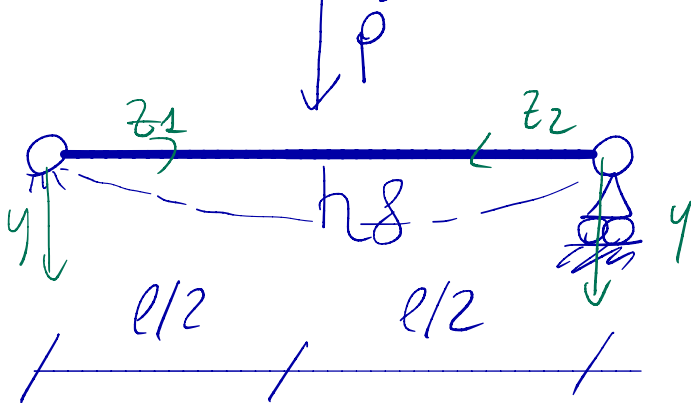
$$v' = \int v'' dz = \frac{1}{EJ} \begin{cases} -\frac{P}{4} z^2 + c_1 & z \leq l/2 \\ -\frac{Pl}{4} z + \frac{P}{4} z^2 + c_2 & z > \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$v = \int v' dz = \frac{1}{EJ} \begin{cases} -\frac{P}{12} z^3 + c_1 z + c_3 & z \leq \frac{l}{2} \\ -\frac{Pl}{8} z^2 + \frac{P}{12} z^3 + c_2 z + c_4 & z > \frac{l}{2} \end{cases}$$

Per determinare le 4 costanti di integrazione è necessario imporre le condizioni al contorno;

$$\left\{ \begin{array}{l} v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \\ v(\frac{l}{2}^+) = v(\frac{l}{2}^-) \\ v'(\frac{l}{2}^+) = v'(\frac{l}{2}^-) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} c_3 = 0 \\ \text{computazionalmente lungo...} \end{array}$$

Si può semplificare usando più sistemi di riferimento:



$$M(z_1) = \frac{P}{2} z_1$$

$$M(z_2) = \frac{P}{2} z_2$$

$$v'(z_1) = -\frac{P}{4EJ} z_1^2 + c_1$$

$$v(z_1) = -\frac{P}{12EJ} z_1^3 + c_1 z_1 + c_2$$

$$v'(z_1) = -\frac{P}{4EJ} z_1^2 + C_3$$

$$v(z_2) = -\frac{P}{12EJ} z_2^3 + C_3 z_2 + C_4$$

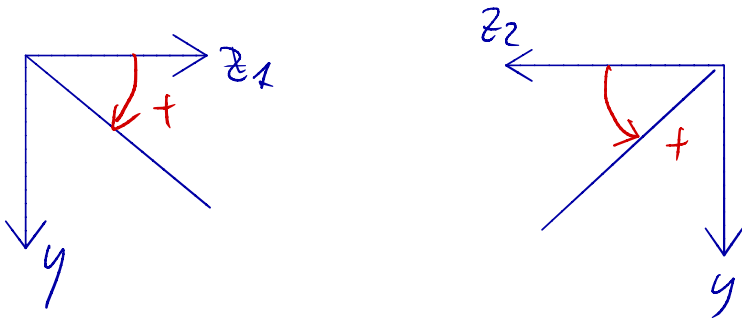
Condizioni al contorno:

$$v(z_1=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v(z_2=0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$v\left(z_1 = \frac{l}{2}\right) = v\left(z_2 = \frac{l}{2}\right) \Rightarrow C_1 = C_3$$

Bisogna anche imporre la continuità delle rotazioni in mezzana. Si osserva che le rotazioni hanno segno differente nei due sistemi:



La condizione deve essere espressa in un unico sistema di riferimento. Risulta quindi:

$$v'\left(z_1 = \frac{l}{2}\right) = -v'\left(z_2 = \frac{l}{2}\right)$$

$$-\frac{P}{4EJ} \cdot \frac{l^2}{4} + C_1 = \frac{P}{4EJ} \frac{l^2}{4} - C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

Risulta quindi:

$$v(z_1) = -\frac{P}{12EJ} z_1^3 + \frac{Pl^2}{16EJ} z_1$$

$$v(z_2) = -\frac{P}{12EJ} z_2^3 + \frac{Pl^2}{16EJ} z_2$$

La freccia risulta quindi pari a:

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{P}{12EJ} \frac{l^3}{8} + \frac{Pl^2}{16EJ} \frac{l}{2} = \frac{Pl^3}{EJ} \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{96} \right) = \frac{Pl^3}{48EJ}$$

VARIAZIONI TERMICHE

Una barra priva di vincoli, soggetta a un campo di temperatura, si dilata.

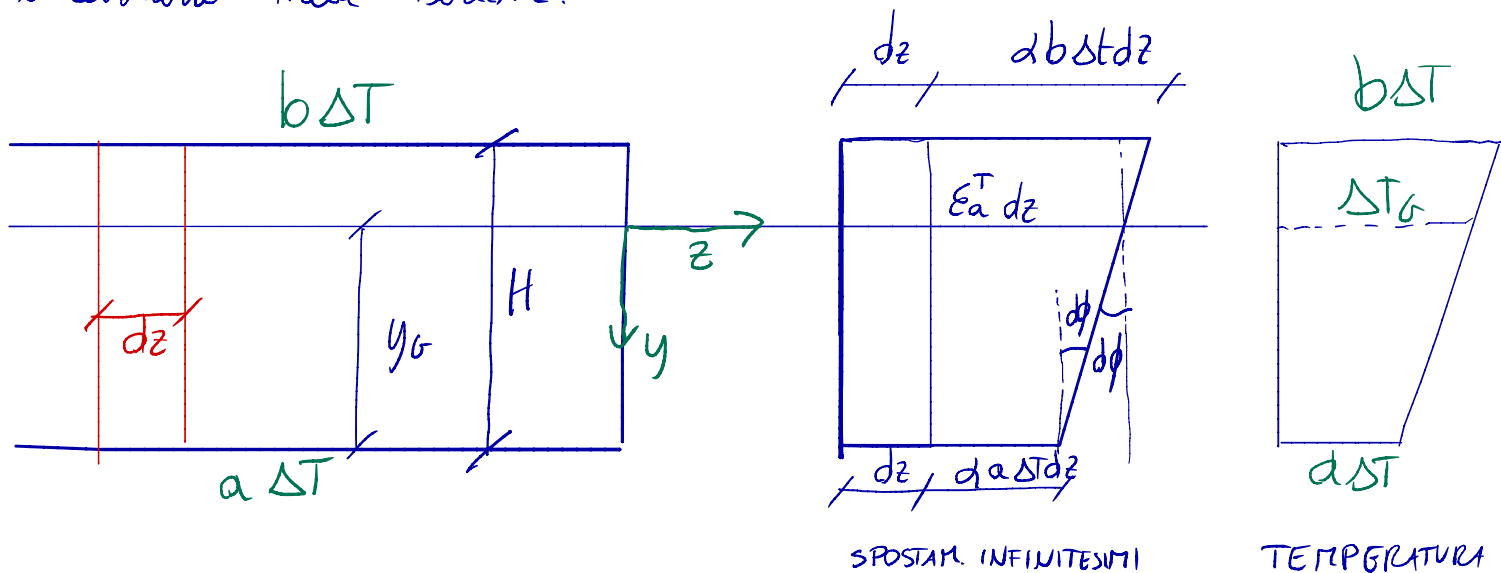


È cioè soggetta a una deformazione costante, detta *deformazione termica*. Risulta:

$$\epsilon = \alpha \Delta T$$

α è un parametro del materiale, detto coefficiente di dilatazione termica. La sua unità di misura è $[1/^\circ\text{C}]$.

È possibile estendere tale risultato al caso di una trave, soggetta a differente temperatura all'interno e all'esterno, ipotizzando che la temperatura vari linearmente nella sezione.



L'asse della trave subisce un allungamento di intensità pari a $\epsilon_a^T dz$.

Risulta:

$$\epsilon_a^T = \alpha \Delta T_G = \alpha \Delta T \left[\frac{b-a}{H} y_G + a \right]$$

Il generico punto infinitesimo subisce inoltre una rotazione

$$d\phi = \alpha \Delta T dz \left(\frac{b-a}{H} \right)$$

Ricordando che, per il teorema di Bernoulli, vale

$$\chi^T = \frac{d\phi}{dz}$$

è possibile definire la curvatura termica χ^T come:

$$\chi^T = \alpha \Delta T \left(\frac{b-a}{H} \right)$$

Linea elastica in presenza di carichi termici

In un generico punto di un continuo, in presenza di deformazioni elastiche e termiche (anelastiche), vale:

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon^d} + \underline{\epsilon^T}$$

La deformazione (totale) è cioè la somma di un termine elastico, legato allo sforzo tramite le equazioni di legame elastico, più un termine anelastico.

Si noti che sono le deformazioni totali ($\underline{\epsilon}$) che devono rispettare le eq. di congruenza.

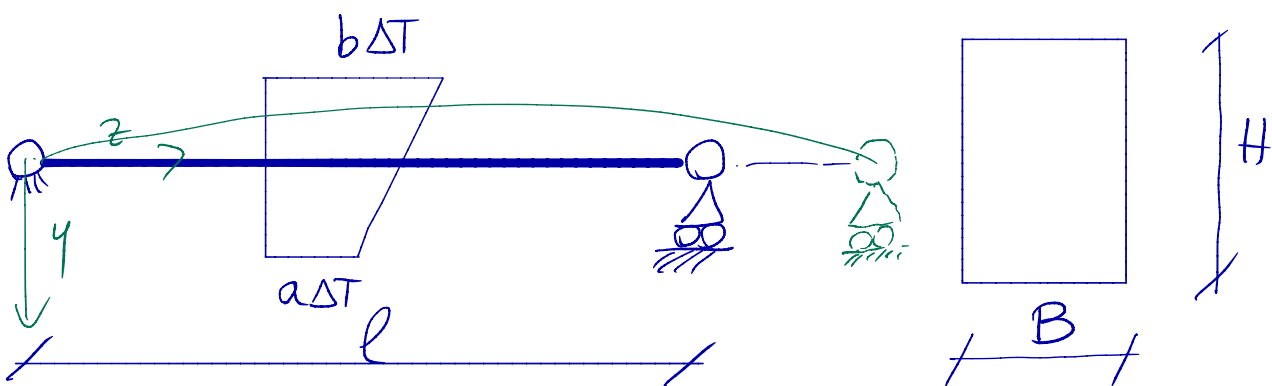
Sulla base di tali considerazioni, è possibile modificare le equazioni della linea elastica:

$$u' = \epsilon_a = \epsilon_a^e + \epsilon_a^T = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta T_0$$

$$\chi = \chi^e + \chi^T \Rightarrow v'' = -\frac{M}{EI} + \alpha \Delta T \left(\frac{b-a}{H} \right)$$

Con riferimento alla 2ª eq., si osserva che la curvatura termica e quella elastica hanno segno opposto (M , positivo se tende le fibre inferiori; curvatura positiva se tende fibre superiori).

ESEMPIO: SPOSTAMENTI IN UNA STRUTTURA ISOSTATICA



La struttura è staticamente determinata. Le variazioni termiche non causano azioni interne perché tali azioni dipendono solo dalle eq. cardinali della statica e non dalle eq. di congruenza.

Spostamento assiale

$$\varepsilon_a = \cancel{\varepsilon_a^e} + \varepsilon_a^T = d \Delta T \left(\frac{b-a}{H} y_0 + a \right) = d \Delta T \left(\frac{b-a}{\cancel{H}} \cdot \frac{\cancel{H}}{2} + a \right) = d \Delta T \frac{a+b}{2}$$

$$u' = \varepsilon_a = d \Delta T \frac{b+a}{2}$$

$$u = \int \varepsilon_a dz = d \Delta T \frac{b+a}{2} z + C_1$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\text{Spostamento massimo: } u(l) = \frac{d \Delta T l}{2} (b+a)$$

Freccia massima

$$v'' = -\frac{\cancel{M}}{\cancel{EI}} + d \frac{b-a}{H} \Delta T$$

$$v' = \int v'' dz = \frac{d(b-a) \Delta T}{2H} z + C_1$$

$$v = \int v' dz = \frac{d(b-a) \Delta T}{2H} z^2 + C_1 z + C_2$$

Condizioni al contorno:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

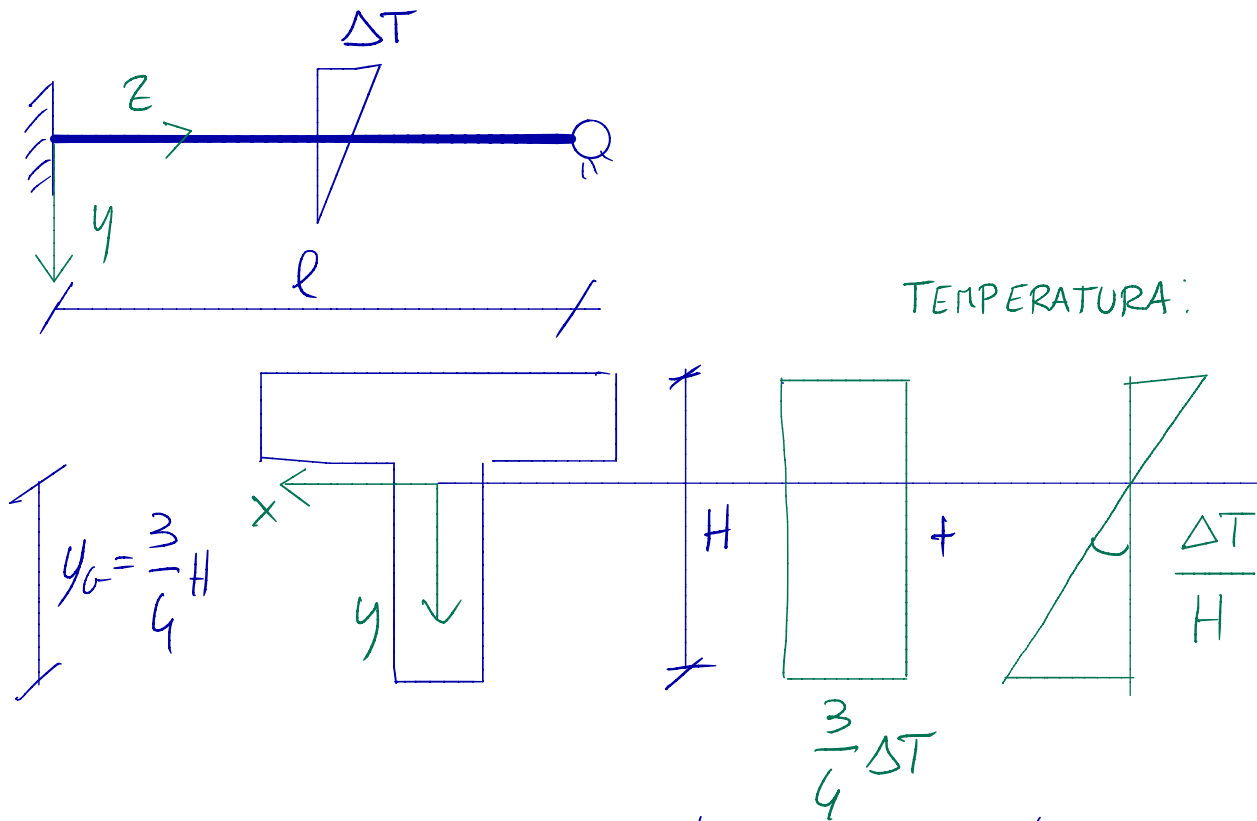
$$v(l) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{d(b-a) \Delta T}{2H} l$$

Risulta quindi:

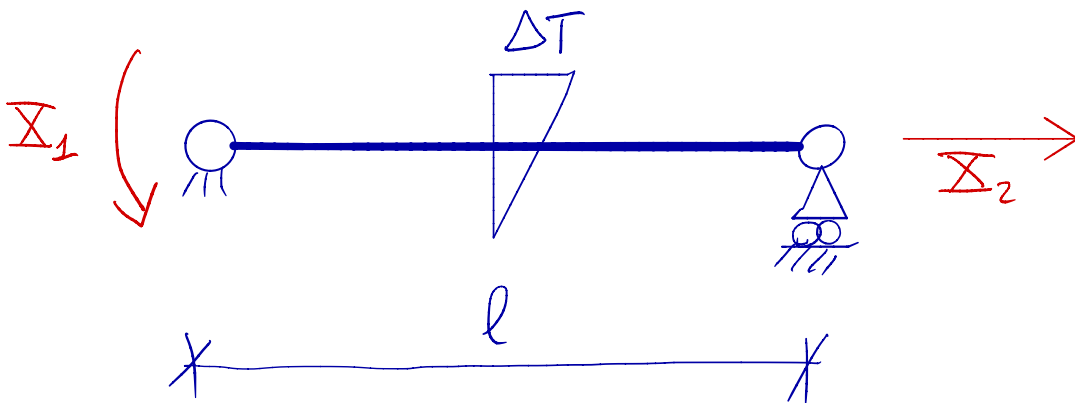
$$v(z) = \frac{d\Delta T(b-a)}{2H} \left(z^2 - lz \right)$$

$$\delta = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{d\Delta T(b-a)}{2H} \left(\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2} \right) = - \frac{d\Delta T(b-a)l^2}{8H}$$

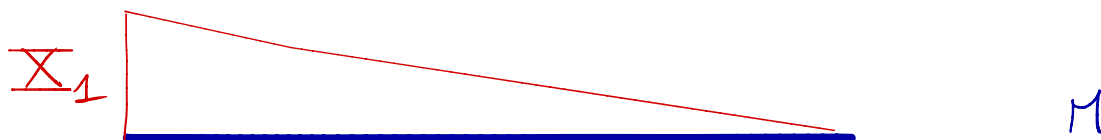
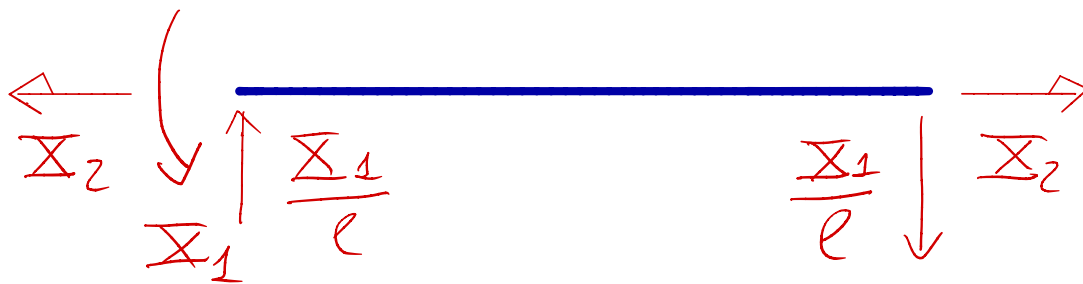
ESEMPIO: AZIONI INTERNE IN UNA TRAVE IPERSTATICA DOVUTE A CARICHI TERMICI



La struttura è due volte iperstatica.



Reazioni vincolari e azioni interne



Risulta

$$N(z) = X_2 \quad (\text{positivo se di trazione})$$

$$M(z) = -X_1 + \frac{X_1}{l} z$$

Applichiamo le eq. della linea elastica:

$$\begin{cases} u' = \frac{N}{EA} + d\Delta T_G = \frac{X_2}{EA} + \frac{3}{4} d\Delta T \\ v'' = -\frac{M}{EJ} + \chi_T = \frac{1}{EJ} \left(X_1 - \frac{X_1}{l} z \right) + \frac{d\Delta T}{H} \end{cases}$$

Integrando si ottiene:

$$u = \int u' dz = \frac{\bar{X}_2}{EA} z + \frac{3}{4} \alpha \Delta T z + C_1$$

$$v' = \int v'' dz = \frac{1}{EJ} \left(\bar{X}_1 z - \frac{\bar{X}_1}{2l} z^2 \right) + \frac{\alpha \Delta T}{H} z + C_2$$

$$v = \int v' dz = \frac{1}{EJ} \left(\bar{X}_1 \frac{z^2}{2} - \frac{\bar{X}_1}{6l} z^3 \right) + \frac{\alpha \Delta T}{2H} z^2 + C_2 z + C_3$$

Condizioni al contorno

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0$$

$$u(l) = 0$$

$$v'(0) = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow C_3 = 0$$

$$v(l) = 0$$

$$u(l) = 0 \quad \frac{\bar{X}_2}{EA} l + \frac{3}{4} \alpha \Delta T l = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{X}_2 = -\frac{3EA}{4} \alpha \Delta T$$

$$v(l) = 0 \quad \frac{1}{EJ} \left(\bar{X}_1 \frac{l^2}{2} - \frac{\bar{X}_1 l^2}{6} \right) + \frac{\alpha \Delta T}{2H} l^2 = 0$$

$$\bar{X}_1 = -\frac{3EJ \alpha \Delta T}{2H}$$

I carichi termici agenti su strutture iperstatiche possono generare azioni molto elevate.

Consideriamo il caso di una sezione equivalente a una IPE 600 in acciaio, soggetta a $\Delta T = 30^\circ\text{C}$

$$E = 210\,000 \text{ MPa} \quad d = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$$

$$H = 600 \text{ mm}$$

$$J_x = 92\,080 \text{ cm}^4 \cdot \frac{1 \text{ mm}^4}{(0,1)^4 \text{ cm}^4} = 920,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$A = 156 \text{ cm}^2 \cdot \frac{1 \text{ mm}^2}{(0,1)^2 \text{ cm}^2} = 15600 \text{ mm}^2$$

$$\Sigma_2 = -\frac{3}{4} \cdot 210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 15\,600 \text{ mm}^2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C} \cdot 30^\circ$$

$$= -884\,520 \text{ N} \quad (88\,452 \text{ kg! Un camion 3 assi 45\,000 kg})$$

$$\Sigma_1 = -\frac{3}{2 \cdot 600 \text{ mm}} \cdot 210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 920,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C} \cdot 30^\circ$$

$$= -174,0312 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y$$

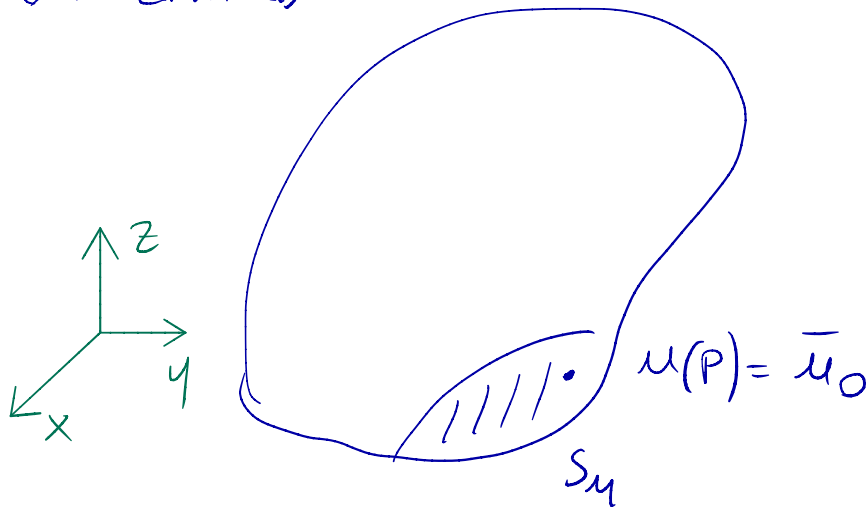
$$\sigma_{zz, \max} = \frac{-884\,520 \text{ N}}{15\,600 \text{ mm}^2} - \frac{174,0312 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}{920,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \cdot \frac{600 \text{ mm}}{2}$$

$$= -56,7 \text{ MPa} - 56,7 \text{ MPa} = 113,4 \text{ MPa} \quad (\text{Fe360 } \sigma_{\text{amm}} = 160 \text{ MPa})$$

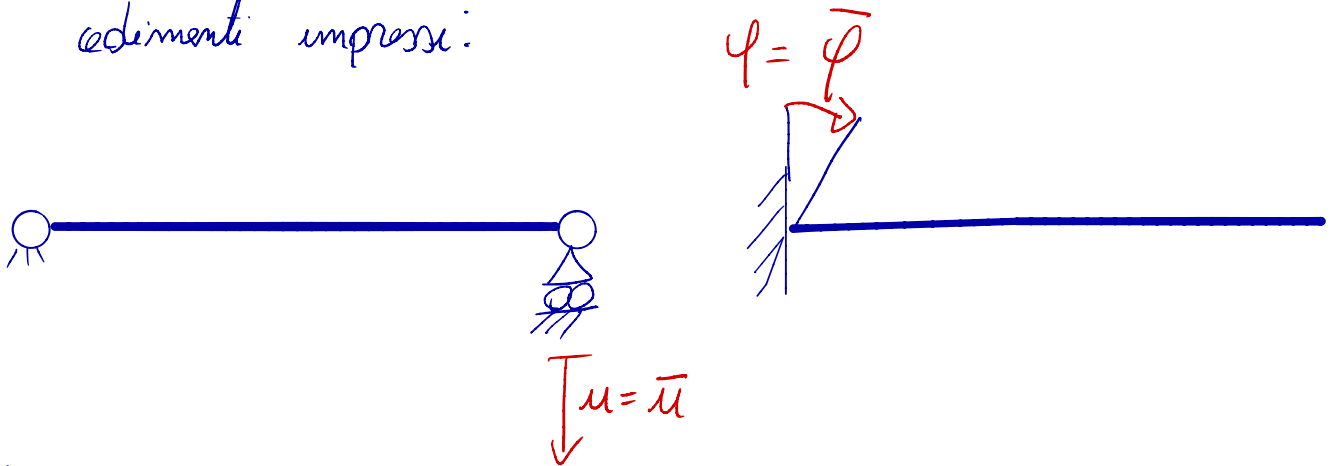
22

Cedimenti vincolari

Un cedimento impresso è un tipo particolare di carico. Corrisponde a un valore assegnato (e quindi noto) di spostamento a uno dei punti della superficie caricata del continuo.



Nel caso delle travi è possibile applicare rotazioni impresse o cedimenti impressi:

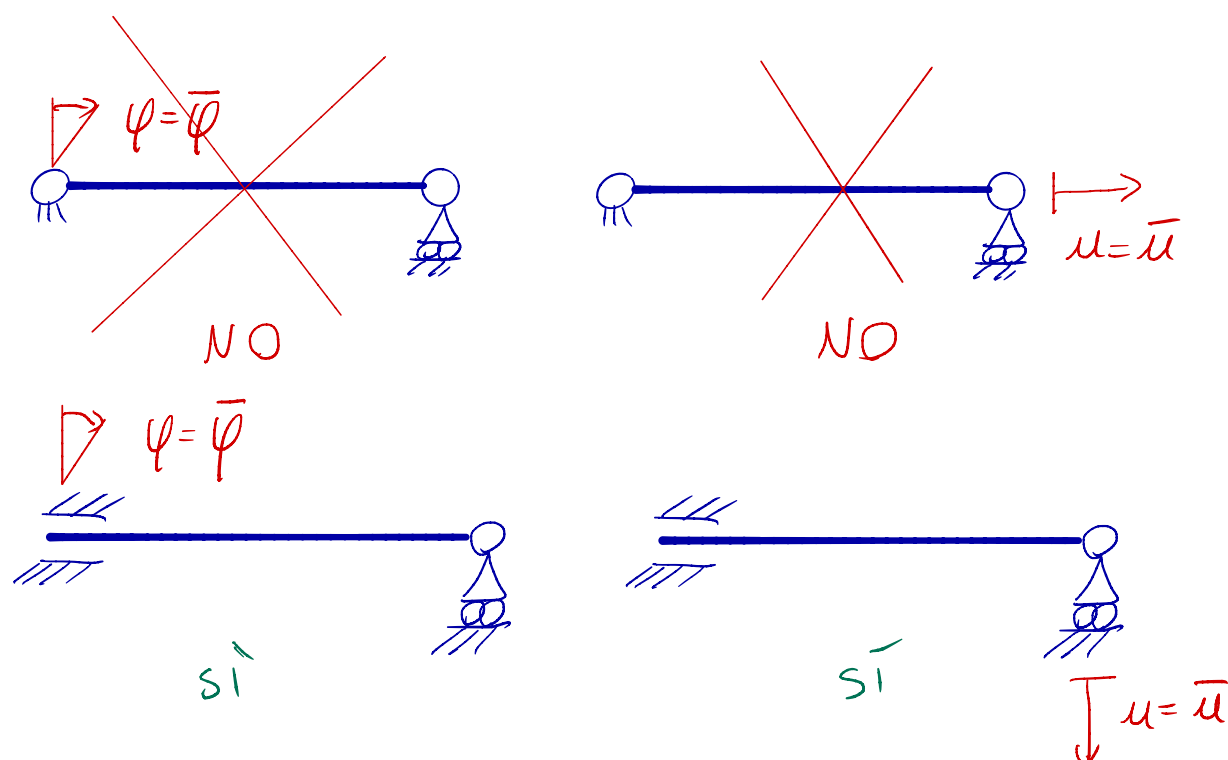


È bene osservare che:

- 1) Lo spostamento (o rotazione) impresso deve essere comunque "piccolo". In tal modo è possibile continuare a utilizzare l'ipotesi di piccoli spostamenti e imporre

l'equilibrio in configurazione indeformata

2) Per poter imporre uno spostamento, il corrispondente atto di moto deve essere impedito dal vincolo soggetto a cedimento.



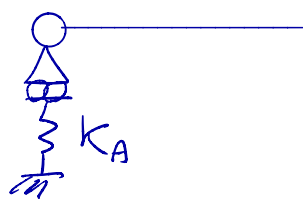
Si osserva infine che nelle strutture staticamente determinate i cedimenti impressi non generano azioni interne: esse, infatti, dipendono solo dalle eq. cardinali della statica. Inoltre, con l'ipotesi di piccoli spostamenti, l'equilibrio è imposto in configurazione indeformata.

Nelle strutture staticamente indeterminate, invece, le azioni interne dipendono anche dalla congruenza. I cedimenti vincolari, quindi, in generale causano azioni interne.

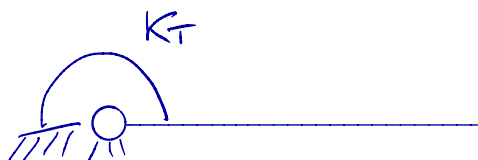
MOLLE

La molla è un tipo particolare di vincolo: per fornire la reazione vincolare, subisce uno spostamento proporzionale alla reazione fornita.

Ci sono 2 tipi di molle:



MOLLA ASSIALE

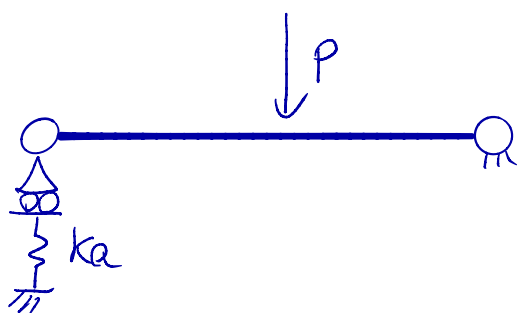


MOLLA TORSIONALE.

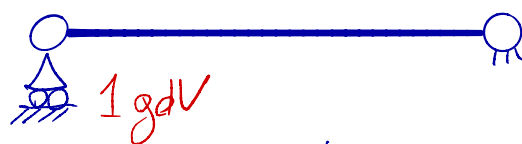
Poiché vale l'ipotesi di piccoli spostamenti, l'equilibrio è impresso in configurazione indeformata, cioè come se la molla avesse una rigidità infinita.

Ciò comporta che l'analisi cinematica e il calcolo delle reazioni vincolari fornite dalle molle si effettua come se esse avessero una rigidità infinita.

Consideriamo ad esempio:

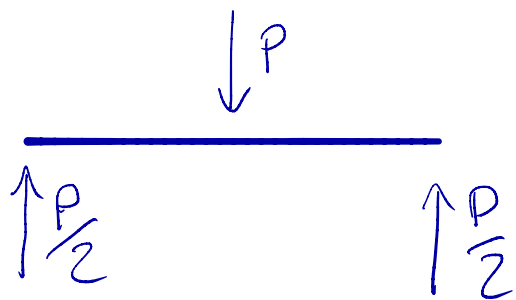


AN. CINEMATICA



(molla irrigidita, ip. piccoli spostam.).

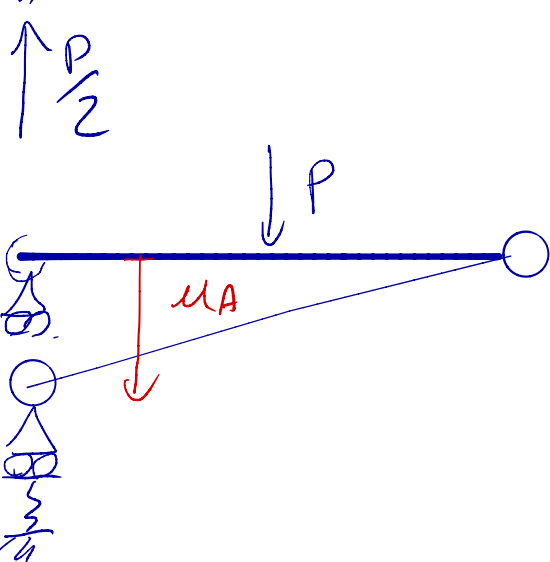
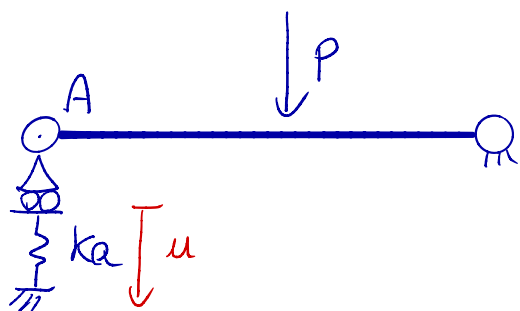
REAZIONI VINCOLARI



equilibrio imposto in configuraz.
indeformata, come se la molla
fosse rigida.

Lo spostamento nella molla è determinabile mediante la legge di Hooke, una volta nota la reazione vincolare

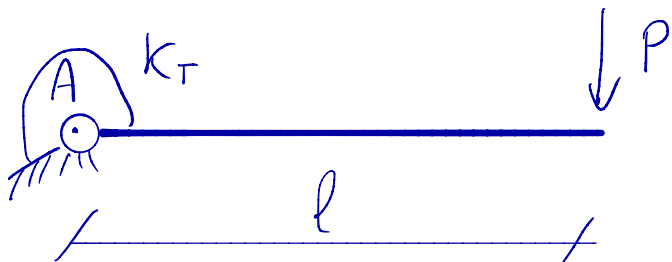
$$|R| = k_a |u| \Rightarrow |u| = \frac{1}{k_a} \left(\frac{P}{2} \right) = \frac{P}{2k}$$



Si osserva che la molla fornisce
una reazione vincolare opposta
allo spostamento subito dal
punto su cui è applicata

Ciò vale per qualunque tipo
di molla.

Ad esempio:

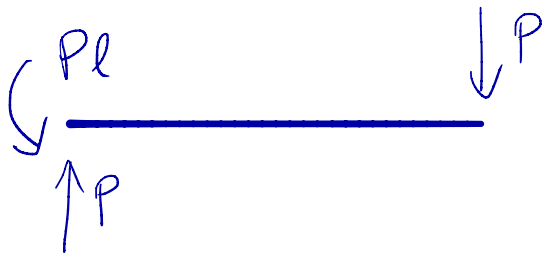


AN. CINEMATICA



(molla vincolata, ip. piccolo
spostam).

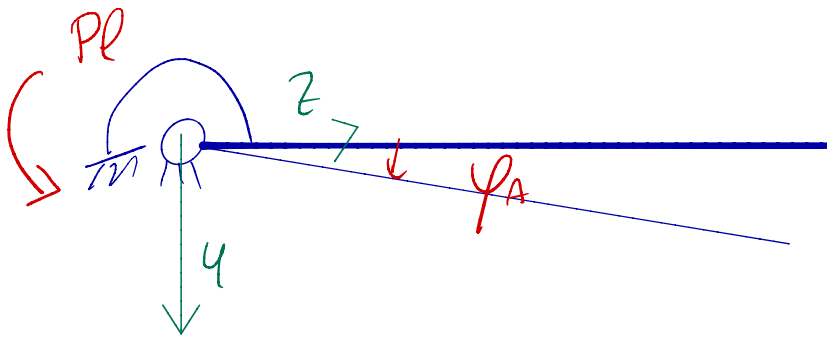
REAZIONI VINCOLARI



equilibrio imposto in configuraz.
indeformata, come se la molla
fosse rigida.

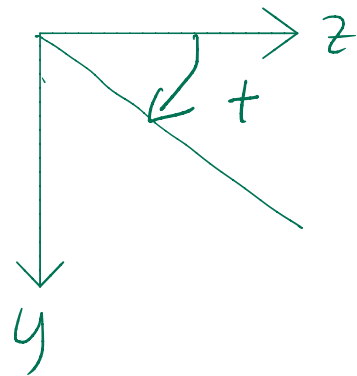
Lo spostamento nella molla è determinabile mediante la
legge di Hooke, una volta nota la reazione vincolare

$$|M| = K_T |\psi| \quad |\psi| = \frac{1}{K_T} (Pl) = \frac{Pl}{K_T}$$

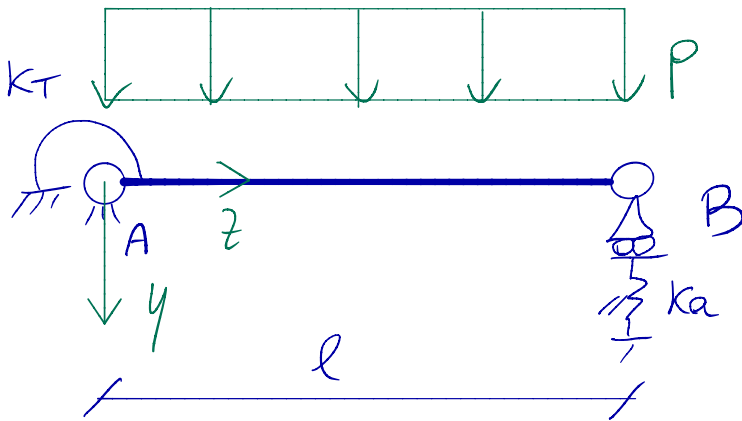


si osserva che la
rotazione (oraria) di A
è opposta al momento
fornito (antioraria)

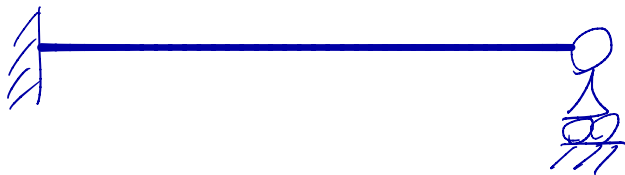
Nel sistema di riferimento scelto,
la rotazione è positiva



ESEMPIO: determinare reazioni vincolari

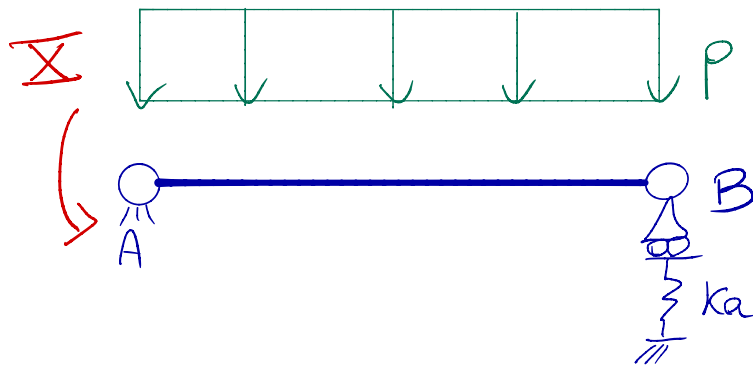


Am. cinematica (irrigidisco e molle)



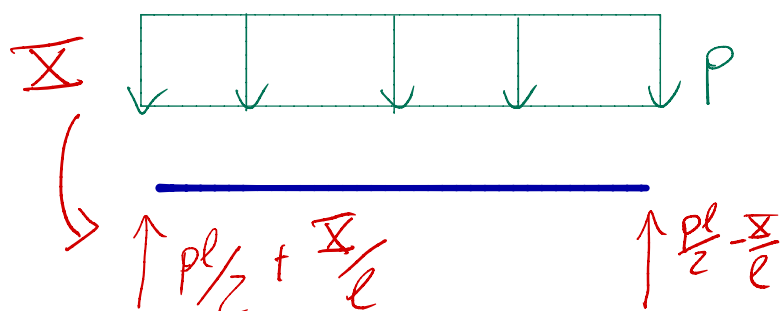
1 volta ipervincolata

Ipostatizzazione:



Perché si è ipotizzato che la reazione fornita dalla molla sia anteriore, la rotazione in A sarà oraria (opposta)

Reazioni vincolari e azioni interne

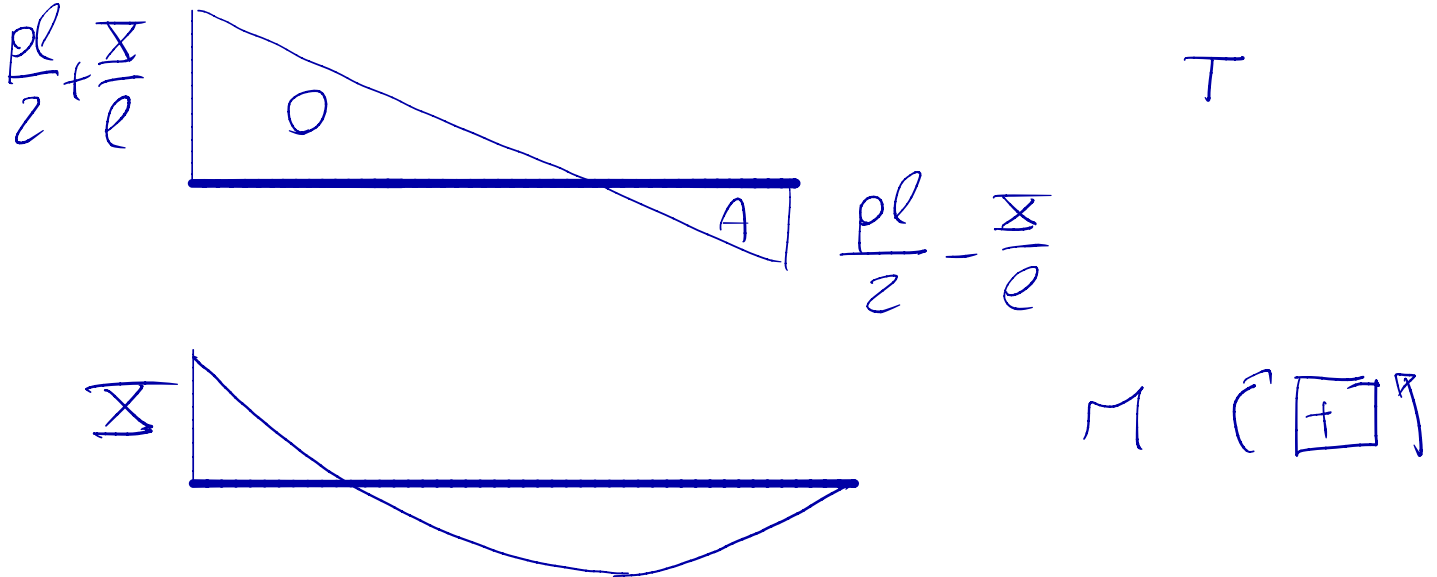


equilibrio imposto in configuraz. indeformata, come se le molle fossero rigide.

Lo spostamento nel punto B sarà pari a

$$v_B = \frac{1}{K\alpha} \left(\frac{Pl}{2} - \frac{\Sigma}{\ell} \right)$$

Essendo la reaz. verticale verso l'alto, lo spostamento sarà verso il basso.



$$M(z) = -\Sigma + \left(\frac{pl}{2} + \frac{\Sigma}{\ell} \right) z - \frac{pz^2}{2}$$

Applichiamo l'eq. della linea elastica:

$$v'' = -\frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\Sigma - \left(\frac{pl}{2} + \frac{\Sigma}{\ell} \right) z + \frac{pz^2}{2} \right]$$

Per ottenere il campo di spostamenti è necessario integrare tale eq. differenziale:

$$v' = \int v'' dz = \frac{1}{EJ} \left[\Sigma z - \left(\frac{pl}{2} + \frac{\Sigma}{\ell} \right) \frac{z^2}{2} + \frac{pz^3}{6} \right] + C_1$$

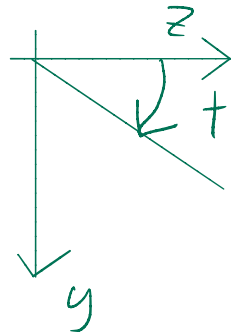
$$v = \int v' dz = \frac{1}{EJ} \left[\frac{\Sigma z^2}{2} - \left(\frac{pl}{2} + \frac{\Sigma}{\ell} \right) \frac{z^3}{6} + \frac{pz^4}{24} \right] + C_1 z + C_2$$

Condizioni al contorno

$$1) v(0) = 0$$

$$2) v(l) = v_B = \frac{1}{K_A} \left(\frac{Pl}{2} - \frac{\Sigma}{2} \right) \quad (\text{positivo, concorde con l'asse } y)$$

$$3) v'(0) = \frac{\Sigma}{l K_T} \quad (\text{orario, positivo nel sist. di ref. adottato})$$



Da 1) risulta $C_2 = 0$

Da 3) risulta $C_1 = \frac{\Sigma}{l K_T}$

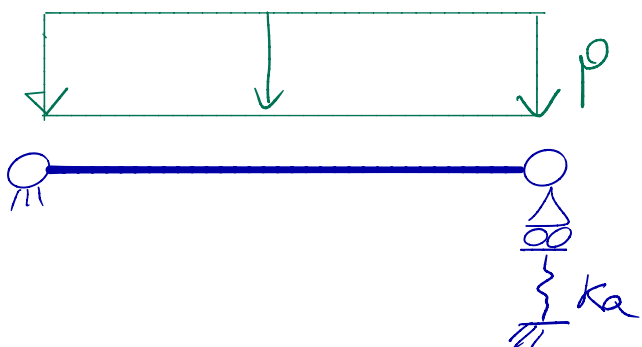
$$v(l) = v_B$$

$$\frac{1}{K_A} \left(\frac{Pl}{2} - \frac{\Sigma}{2} \right) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{\Sigma l^2}{2} - \left(\frac{Pl}{2} + \frac{\Sigma}{l} \right) \frac{l^3}{6} + \frac{Pl^4}{24} \right] + \frac{\Sigma}{K_T}$$

$$\Sigma \left[\frac{1}{K_T} + \frac{1}{l K_A} + \frac{1}{3} \frac{l^2}{EJ} \right] = Pl^2 \left(\frac{1}{2l K_A} + \frac{l^2}{24 EJ} \right)$$

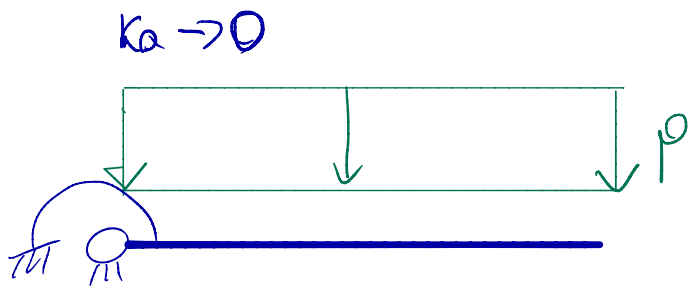
$$\Sigma = Pl^2 \cdot \frac{\frac{12 EJ + l^3 K_A}{24 EJ l K_A}}{\frac{3 EJ l K_A + 3 EJ K_T + l^3 K_T K_A}{3 EJ l K_T K_A}} = Pl^2 \frac{(12 EJ + l^3 K_A) K_T}{8 \cdot (3 EJ l K_A + 3 EJ K_T + l^3 K_T K_A)}$$

Casi limite



$$K_T \rightarrow 0$$

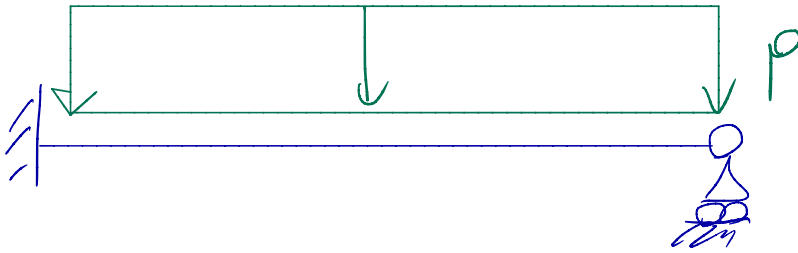
$$\Sigma = 0 \quad \text{ok!}$$



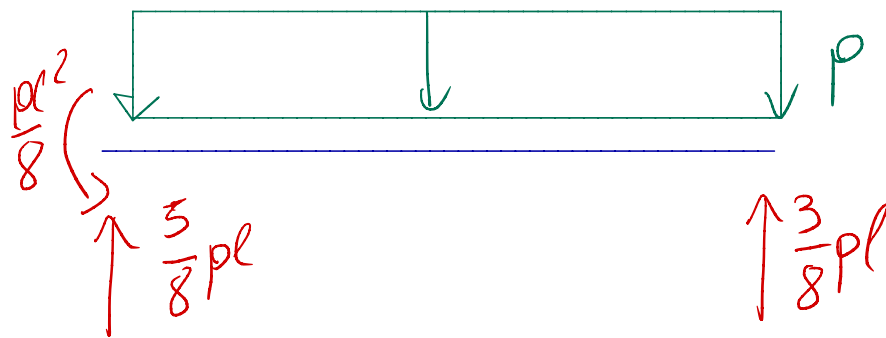
$$\Delta = pl^2 \cdot \frac{12EJ\cancel{K_T}}{24EJ\cancel{K_T}} = \frac{pl^2}{2}$$

OK

$K_T \rightarrow \infty, k_a \rightarrow \infty$

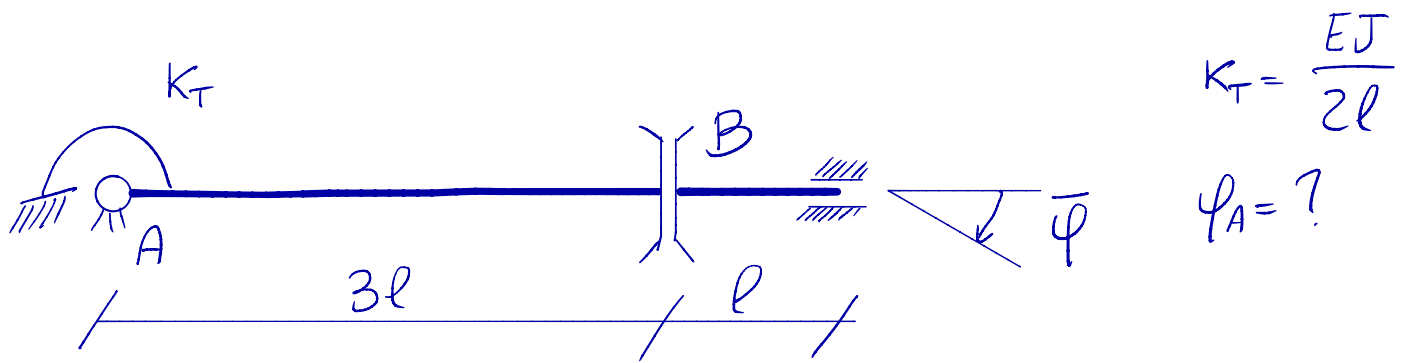


$$\Delta = \frac{pl^2 \left(\frac{12EJ}{\cancel{k_a}} + l^3 \right)}{8\cancel{K_T}\cancel{k_a} \left(\frac{3EJl}{\cancel{K_T}} + \frac{3EJ}{\cancel{k_a}} + l^3 \right)} = \frac{pl^2}{8} \text{ ok!}$$



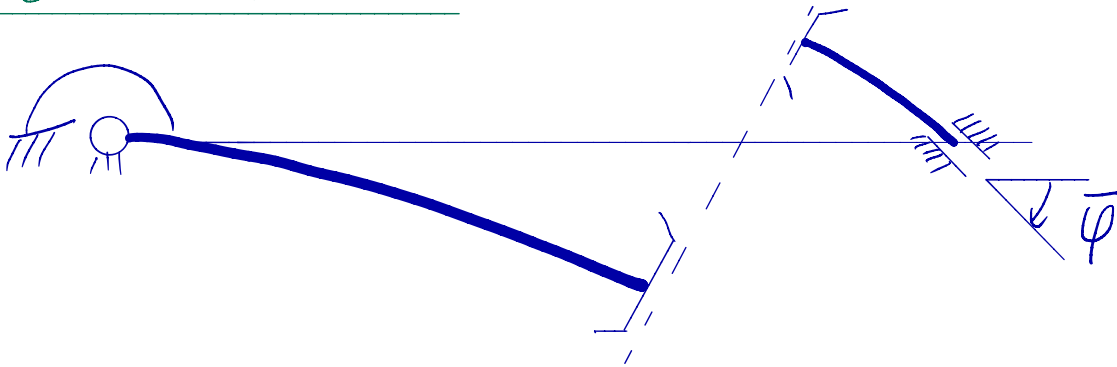
(vedi esempio precedente)

ESERCIZIO



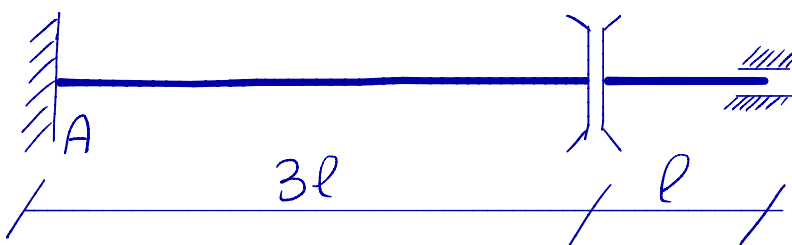
Si osserva che a causa della presenza di un pattino interno risulta che gli spostamenti non sono continui. Sono quindi necessari 2 campi di integrazione.

Deformata qualitativa:



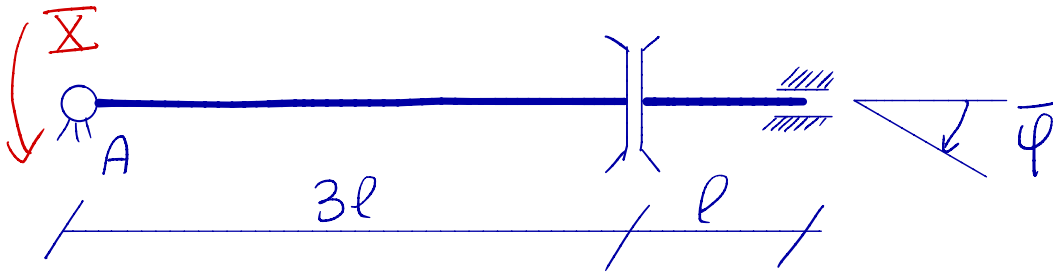
Analisi cinematica

Con l'ipotesi di piccoli spostamenti, l'equilibrio è imposto in configurazione indeformata. Si considerano quindi le molle rigide, e si trascurano i cedimenti vincolari. Risultato:



staticamente indet.
(1 volta)

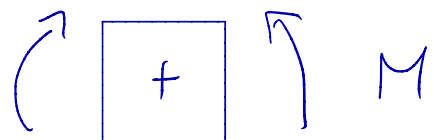
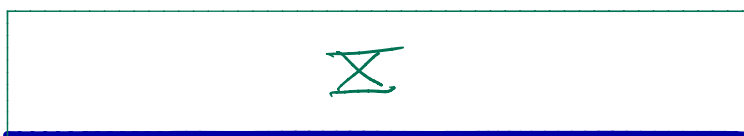
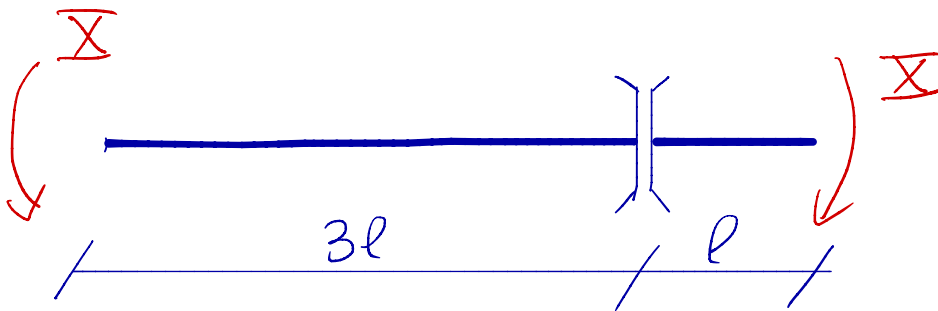
Isostaticazione



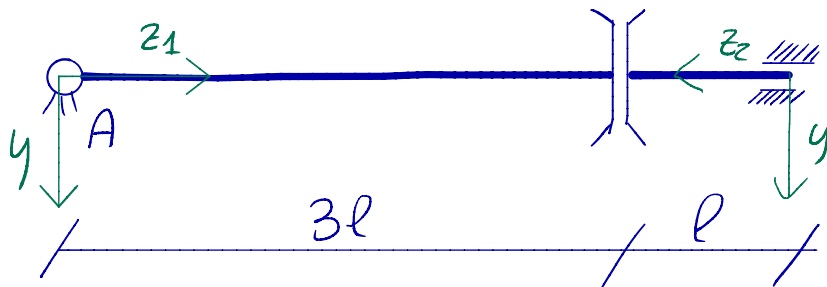
Per effetto della molla, il punto A subirà una rotazione opposta alla reazione vincolare. Avendo posto X antiorario, la rotazione sarà oraria.

Reazioni vincolari e azioni interne

Con l'ipotesi di piccoli spostamenti l'equilibrio è imposto in configurazione indeformata (molle rigide, assenza di cedimenti impressi). Risultati:



Nonostante risulti M costante, a causa del pattino (che causa una discontinuità nel campo di spostamenti), è necessario adottare 2 sistemi di riferimento:



Adottando le convenzioni della linea elastica (M positivo se tende le fibre inferiori), risulta:

$$M(z_1) = -X$$

$$M(z_2) = -X$$

Le eq. della linea elastica risultano:

$$v''(z_1) = -\frac{M(z_1)}{EJ} = \frac{X}{EJ}$$

$$v''(z_2) = -\frac{M(z_2)}{EJ} = \frac{X}{EJ}$$

$$v'(z_1) = \int v'' dz_1 = \frac{X z_1}{EJ} + C_1$$

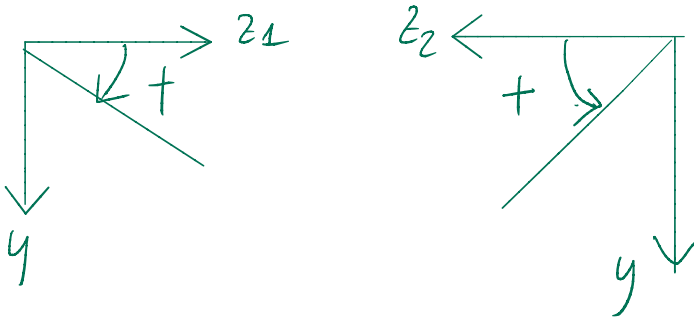
$$v'(z_2) = \int v'' dz_2 = \frac{X z_2}{EJ} + C_2$$

$$v(z_1) = \frac{X z_1^2}{2EJ} + C_1 z_1 + C_3$$

$$v(z_2) = \frac{X z_2^2}{2EJ} + C_2 z_2 + C_4$$

Condizioni al contorno

Si osserva che nei due sistemi di riferimento le rotazioni positive hanno verso opposto:



La presenza del pattino garantisce inoltre che le due sezioni su cui è applicato non subiranno rotazioni relative.

Risulta quindi:

$$v(z_1=0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_3=0$$

$$v(z_2=0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_4=0$$

$$v'(z_1=0)=\frac{\overline{X}}{K_T} \quad \Rightarrow \quad C_1=\frac{\overline{X}}{K_T}$$

$$v'(z_2=0)=-\overline{\varphi} \quad \Rightarrow \quad C_2=-\overline{\varphi}$$

$$v'(z_1=3\ell)=-v'(z_2=\ell)$$

$$\frac{\overline{X}3\ell}{EJ} + \frac{\overline{X}}{K_T} = -\frac{\overline{X}\ell}{EJ} + \overline{\varphi}$$

Poiché $K_T = \frac{EJ}{2\ell}$ risulta:

$$\overline{X} = \frac{EJ}{6\ell} \overline{\varphi}$$

Applicando la legge di Hooke alla molla è possibile determinare la rotazione del punto A.

$$\varphi_A = \frac{\overline{X}}{K_T} = \frac{EJ}{6l} \overline{\varphi} \cdot \frac{2l}{EJ} = \frac{\overline{\varphi}}{3}$$

Se osservi infine che, per effetto del pattino, le sezioni sinistra e destra in B subiranno uno spostamento relativo. Risultato:

$$v(z_1=3l) = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{EJ}{6l} \overline{\varphi} \cdot 3l^2 + \frac{EJ}{6l} \overline{\varphi} \cdot \frac{2l}{EJ} \cdot 3l = \frac{7}{4} \overline{\varphi} l$$

$$v(z_2=l) = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{EJ}{6l} \overline{\varphi} l^2 - \overline{\varphi} l = -\frac{11}{12} \overline{\varphi} l$$

$$\Delta v = v(z_2=l) - v(z_1=l) = \left(-\frac{11}{12} - \frac{7}{4} \right) \overline{\varphi} l = -\frac{32}{12} \overline{\varphi} l = -\frac{8}{3} \overline{\varphi} l$$